**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**

**высшего образования**

**«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**

**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

Факультет: **Фундаментальные науки**

Кафедра: **Прикладная математика**

**Отчёт по лабораторным работам**

**по курсу “Методы оптимизации”**

**Студент:** Пахотин А. Е.

**Группа:** ФН2-52Б

**Преподаватель:** Чередниченко А.В.

Москва, 2022

**Содержание**

[**Введение**](#_rrf40hy4ixs7) **3**

[**1. Методы сопряжённых направлений (ЛР№3)**](#_kjtwc0ge2iew) **4**

[1.1. Квадратичная функция](#_rkckau76h5r) 4

[1.2. Функция Розенброка (α = 1)](#_htlmvb7ntxei) 7

[1.3. Функция Розенброка (α = 5)](#_wytzuka6k2wt) 12

# Введение

В данной работе изучены и реализованы следующие методы оптимизации:

1. методы сопряжённых градиентов (лабораторная работа №3):
   1. метод сопряженных градиентов;
   2. метод Флетчера-Ривса;
   3. метод Полака-Рибьера;

Для каждого метода проведены тестирования и построены графики для квадратичной функции и функций Розенброка, для двух разных начальных точек и для двух точностей. Для методов последовательной безусловной минимизации использованы два допустимых множества, на которых происходил поиск.

# 1. Методы сопряжённых направлений (ЛР№3)

## 1.1. Квадратичная функция

Квадратичная функция .

*Таблица 1.1 — Результаты тестирования для квадратичной функции*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (-2 , 5)  Точность: 0.01 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 2 | 2 | 2 |
| Количество вычислений функции | 53 | 53 | 53 |
| Найденная точка | (2.24, 0.00) | (2.24, 0.00) | (2.24, 0.00) |
| Минимальное значение функции | -66 | -66 | -66 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (-2 , 5)  Точность: 0.00001 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 2 | 2 | 2 |
| Количество вычислений функции | 81 | 81 | 81 |
| Найденная точка | (2.23607, 0.00000) | (2.23607, 0.00000) | (2.23607, 0.00000) |
| Минимальное значение функции | -66 | -66 | -66 |

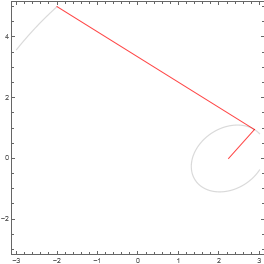


Рисунок 1.1.1 — Метод сопряжённых градиентов

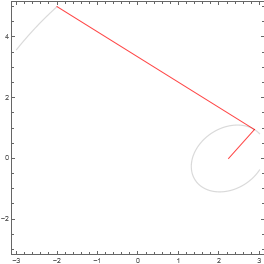


Рисунок 1.1.2 — Метод Флетчера-Ривса

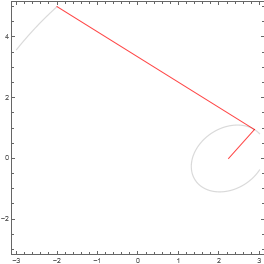


Рисунок 1.1.3 — Метод Полака-Рибьера

*Таблица 1.2 — Результаты тестирования для квадратичной функции*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (1.5 , 2)  Точность: 0.00001 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 2 | 2 | 2 |
| Количество вычислений функции | 57 | 57 | 57 |
| Найденная точка | (2.24, 0.00) | (2.24, 0.00) | (2.24, 0.00) |
| Минимальное значение функции | -66 | -66 | -66 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (1.5 , 2)  Точность: 0.00001 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 2 | 2 | 2 |
| Количество вычислений функции | 85 | 85 | 85 |
| Найденная точка | (2.23607, 0.00000) | (2.23607, 0.00000) | (2.23607, 0.00000) |
| Минимальное значение функции | -66 | -66 | -66 |

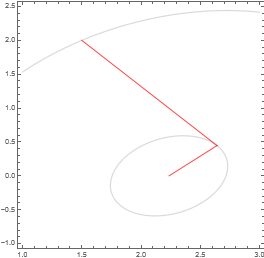


Рисунок 1.2.1 — Метод сопряжённых градиентов

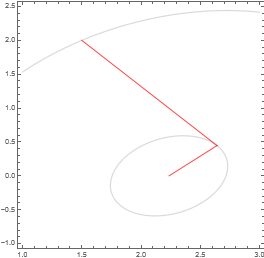


Рисунок 1.2.2 — Метод Флетчера-Ривса

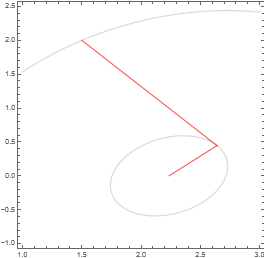


Рисунок 1.2.3 — Метод Полака-Рибьера

## 1.2. Функция Розенброка (α = 1)

Функция Розенброка .

*Таблица 1.3 — Результаты тестирования для функции Розенброка*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (-2 , 5)  Точность: 0.00001 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 9 | 39 | 9 |
| Количество вычислений функции | 268 | 1159 | 268 |
| Найденная точкаа | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (-2 , 5)  Точность: 0.00001 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 11 | 79 | 11 |
| Количество вычислений функции | 514 | 4022 | 514 |
| Найденная точкаа | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 | 0 |

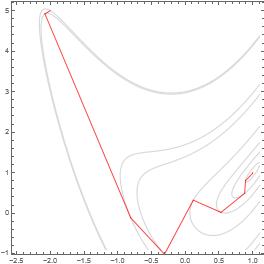


Рисунок 1.3.1 — Метод сопряжённых градиентов

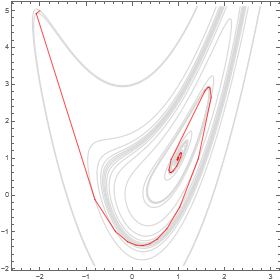


Рисунок 1.3.2 ­– Метод Флетчера-Ривса

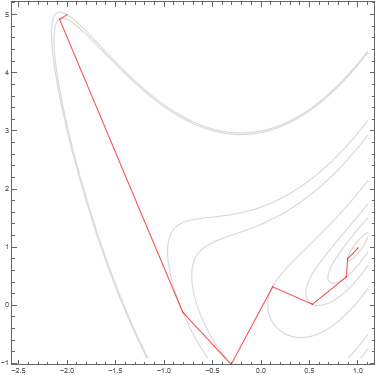


Рисунок 1.3.3 — Метод Полака-Рибьра

*Таблица 1.4 — Результаты тестирования функции Розенброка*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (1.5 , 2)  Точность: 0.01 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 4 | 3 | 4 |
| Количество вычислений функции | 131 | 94 | 131 |
| Найденная точка | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (1.5, 2)  Точность: 0.00001 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 5 | 8 | 5 |
| Количество вычислений функции | 246 | 437 | 246 |
| Найденная точка | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 | 0 |

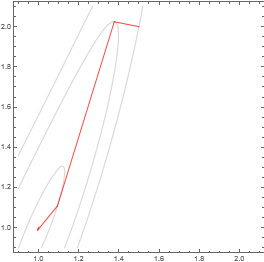


Рисунок 1.4.1 — Метод сопряжённых градиентов

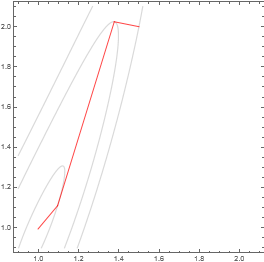


Рисунок 1.4.2 — Метод Флетчера-Ривса

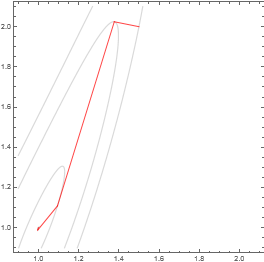


Рисунок 1.4.3 — Метод Полака-Рибьера

## 

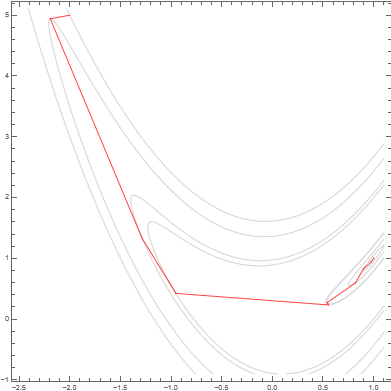
## 1.3. Функция Розенброка (α = 5)

Функция Розенброка .

*Таблица 1.5 — Результаты тестирования для функции Розенброка*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (-2 ,5)  Точность: 0.01 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 10 | 34 | 10 |
| Количество вычислений функции | 285 | 808 | 285 |
| Найденная точка | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (-2 , 5)  Точность: 0.00001 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 11 | 46 | 11 |
| Количество вычислений функции | 490 | 1923 | 490 |
| Найденная точка | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 | 0 |

Рисунок 1.5.1 — Метод сопряжённых градиентов

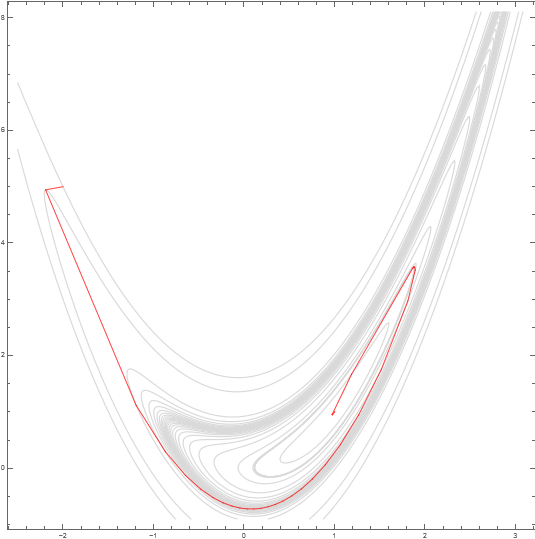


Рисунок 1.5.2 — Метод Флетчера-Ривса

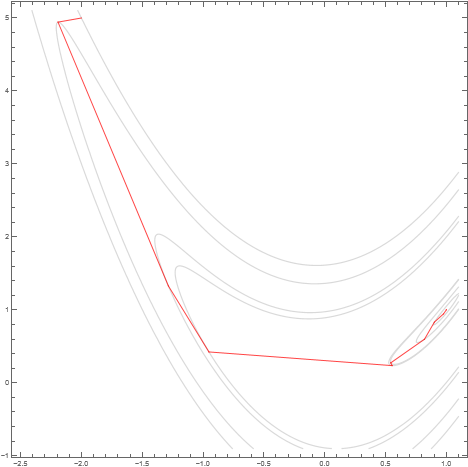


Рисунок 1.5.3 — Метод Полака-Рибьера

*Таблица 1.6 — Результаты тестирования для функции Розенброка*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (1.5 , 2)  Точность: 0.01 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 5 | 8 | 5 |
| Количество вычислений функции | 145 | 255 | 145 |
| Найденная точка | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (1.5 , 2)  Точность: 0.00001 | Метод сопряжённых градиентов | Метод Флетчера-Ривса | Метод Полака-Рибьера |
| Количество итераций | 7 | 16 | 7 |
| Количество вычислений функции | 332 | 836 | 332 |
| Найденная точка | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 | 0 |

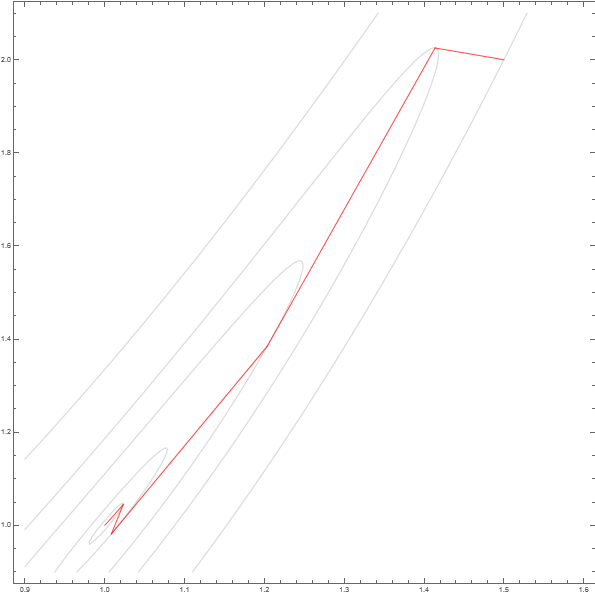


Рисунок 1.6.1 — Метод сопряжённых градиентов

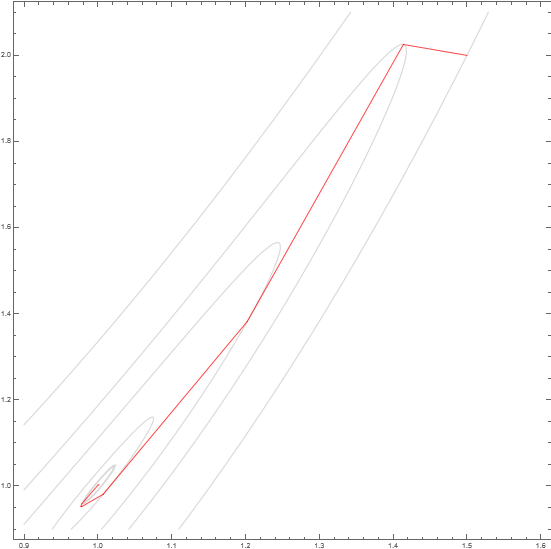
****

Рисунок 1.6.2 — Метод Флетчера-Ривса

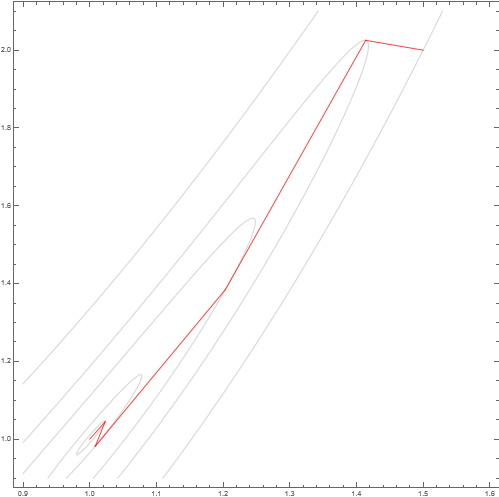


Рисунок 1.6.3 — Метод Полака-Рибьера

# 2. Ньютоновские методы (ЛР№4)

## 2.1. Квадратичная функция

Квадратичная функция .

*Таблица 1.1 — Результаты тестирования для квадратичной функции*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (2 , 2)  Точность: 0.01 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 1 | 1 |
| Количество вычислений функции | 7 | 31 |
| Найденная точкаа | (2.24, 0.00) | (2.24, 0.00) |
| Минимальное значение функции | -66 | -66 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (2 , 2)  Точность: 0.00001 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 1 | 1 |
| Количество вычислений функции | 7 | 60 |
| Найденная точкаа | (2.23607, 0.00000) | (2.23607, 0.00000) |
| Минимальное значение функции | -66 | -66 |

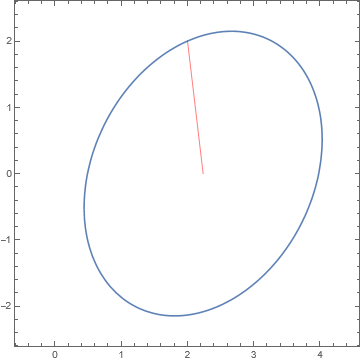
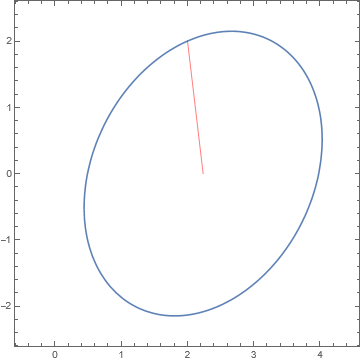


Рисунок 2.1.1 — Метод Ньютона

Рисунок 2.1.2 — Модифицированный метод Ньютона

*Таблица 2.2 — Результаты тестирования для квадратичной функции*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (5 , -4)  Точность: 0.01 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 1 | 1 |
| Количество вычислений функции | 7 | 29 |
| Найденная точкаа | (2.24, 0.00) | (2.24, 0.00) |
| Минимальное значение функции | -66 | -66 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (5 , -4)  Точность: 0.00001 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 1 | 1 |
| Количество вычислений функции | 7 | 58 |
| Найденная точкаа | (2.23607, 0.00000) | (2.23607, 0.00000) |
| Минимальное значение функции | -66 | -66 |

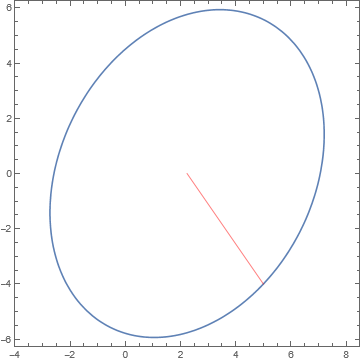
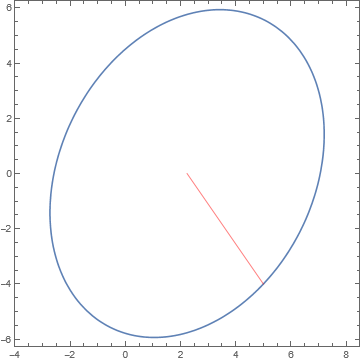


Рисунок 2.2.1 — Метод Ньютона

Рисунок 2.2.2 — Модифицированный метод Ньютона

## 

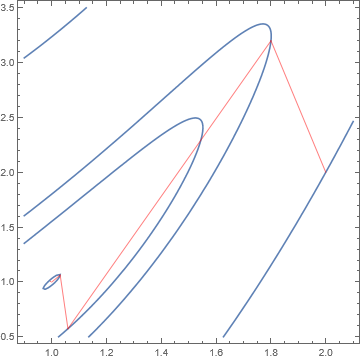
## 2.2. Функция Розенброка (α = 1)

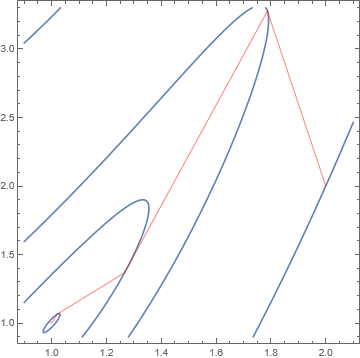
Функция Розенброка .

*Таблица 2.3 — Результаты тестирования для функции Розенброка*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (2 , 2)  Точность: 0.01 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 4 | 4 |
| Количество вычислений функции | 22 | 135 |
| Найденная точкаа | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (2 , 2)  Точность: 0.00001 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 5 | 5 |
| Количество вычислений функции | 27 | 313 |
| Найденная точкаа | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 |

****Рисунок 2.3.1 — Метод Ньютона

****Рисунок 2.3.2 — Модифицированный метод Ньютона

*Таблица 2.4 — Результаты тестирования для функции Розенброка*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (5 , -4)  Точность: 0.01 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 4 | 6 |
| Количество вычислений функции | 22 | 204 |
| Найденная точка | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (5 , -4)  Точность: 0.00001 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 5 | 7 |
| Количество вычислений функции | 27 | 448 |
| Найденная точка | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 |

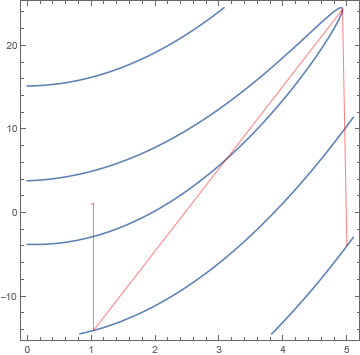
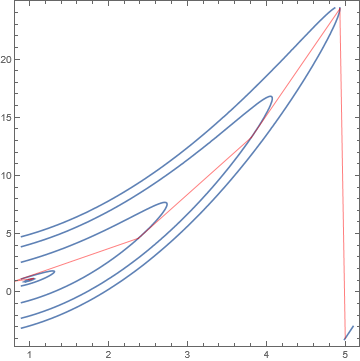
 

Рисунок 2.4.1 — Метод НьютонаРисунок 2.4.2 — Модифицированный метод Ньютона

## 2.3. Функция Розенброка (α = 5)

Функция Розенброка

*Таблица 2.5 — Результаты тестирования для функции Розенброка*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (2 , 2)  Точность: 0.01 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 4 | 6 |
| Количество вычислений функции | 22 | 176 |
| Найденная точка | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (2 , 2)  Точность: 0.00001 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 5 | 6 |
| Количество вычислений функции | 27 | 350 |
| Найденная точка | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 |

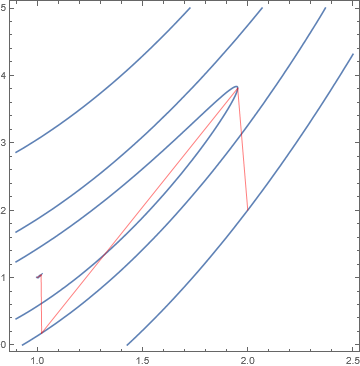
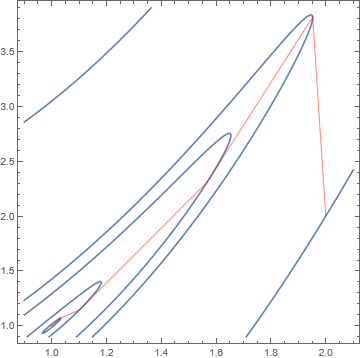
**** ****

Рисунок 2.4.1 — Метод Ньютона Рисунок 2.4.2 — Модифицированный

метод Ньютона

*Таблица 2.6 — Результаты тестирования для функции Розенброка*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (5 , -4)  Точность: 0.01 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 4 | 7 |
| Количество вычислений функции | 22 | 205 |
| Найденная точка | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (5 , -4)  Точность: 0.00001 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 5 | 9 |
| Количество вычислений функции | 27 | 524 |
| Найденная точка | (1.00000, 1.00000) | (1.00000, 1.00000) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 |

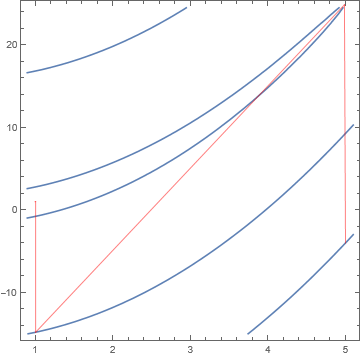
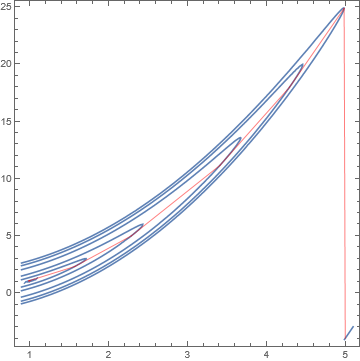
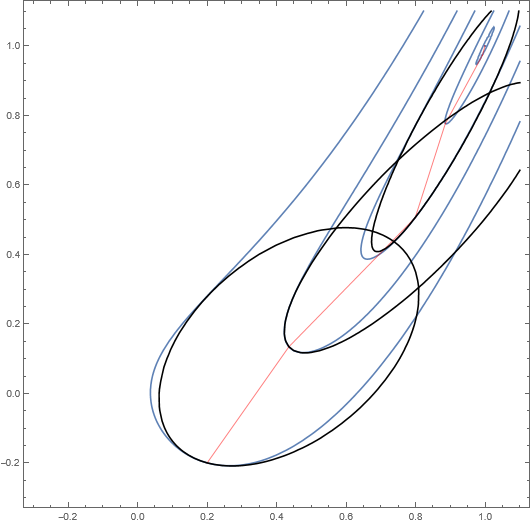
 

Рисунок 2.4.1 — Метод Ньютона Рисунок 2.4.2 — Модифицированный

метод Ньютона

*Таблица 2.7 — Результаты тестирования для функции Розенброка*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Начальная точка:  (0.2 , -0.2)  Точность: 0.01 | Метод Ньютона | Модифицированный метод Ньютона |
| Количество итераций | 5 | 3 |
| Количество вычислений функции | 27 | 92 |
| Найденная точка | (1.00, 1.00) | (1.00, 1.00) |
| Минимальное значение функции | 0 | 0 |

  
Рисунок 2.7.1 — Метод Ньютона

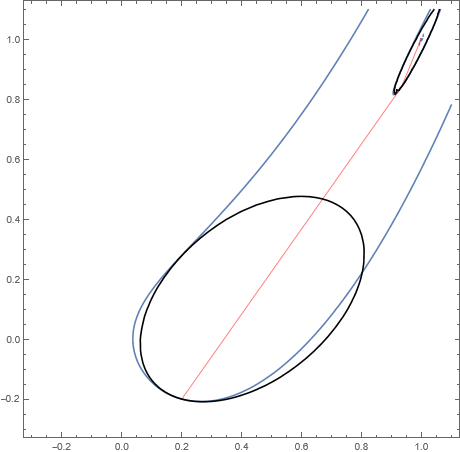
****

Рисунок 2.7.2 — Модифицированный метод Ньютона